LÓGICA FORMAL

Lógica Proposicional: Teorema de Efectividad

Pedro López

Departamento de Inteligencia Artificial
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid

Lógica Proposicional

- La lógica proposicional es un lenguaje para representar afirmaciones (o enunciados).
- Un lenguaje se define a partir de un conjunto de símbolos y unas reglas de combinación de símbolos.
- El conjunto de estos símbolos recibe el nombre de alfabeto.

Alfabeto de la Lógica Proposiconal

- Símbolos NO lógicos:
  - ◇ Símbolos de proposición: $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \ldots$
- Símbolos lógicos:
  - ◇ Conectivas lógicas:
    - * Negación: $\neg$
    - * Disyunción: $\vee$
    - * Conjunción: $\wedge$
    - * Implicación: $\longrightarrow$
    - * Equivalencia: $\leftrightarrow$

Fórmulas y fórmulas atómicas (de Log. Proposicional)

- Fórmula atómica: todo símbolo de proposición es una fórmula atómica.
- Las fórmulas se definen inductivamente de la forma siguiente:
  - ◇ Todo símbolo de proposición (e.d. fórmula atómica) es una fórmula.
  - ◇ Si $\mathbf{A}$ es una fórmula entonces $(\neg\mathbf{A})$ es una fórmula.
  - ◇ Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son fórmulas entonces $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$ y $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B})$ son fórmulas.
  - ◇ No hay más fórmulas que las definidas por los puntos anteriores.
- Denotaremos fórmulas genéricas con: $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, ...

Ejemplos de fórmulas

- $(\neg \mathbf{p})$
- $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})$
- $(\mathbf{p} \vee \mathbf{r})$
- $(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q})$
- $(\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{s})$
- $(\neg(\neg \mathbf{p}))$
- $(\neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}))$
- $(\mathbf{p} \rightarrow (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}))$
- $((\neg \mathbf{p}) \wedge (\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{s}))$
- $((\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \vee (\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{s}))$

Valoraciones

- Las valoraciones asignan significado a las fórmulas.
- El significado de una fórmula es un valor de verdad (verdadero o falso).
- Sea $\mathbf{L}$ un lenguaje proposicional.
- Una valoración para $\mathbf{L}$ es un aplicación, $\mathbf{v}$, tal que a toda fórmula $\mathbf{A}$ de $\mathbf{L}$ le hace corresponder un valor ($\mathbf{V}$ ó $\mathbf{F}$) denotado $\mathbf{v}(\mathbf{A})$.
- $\mathbf{v}(\mathbf{A})$ se define de la forma siguiente:
  - ◇ Si $\mathbf{A}$ es un símbolo de proposición (e.d. fórmula atómica), $\mathbf{v}(\mathbf{A})$ se fija arbitrariamente.
  - ◇ Si $\mathbf{A}$ es una fórmula (no atómica): tablas de verdad de las conectivas lógicas.

Tablas de verdad de las conectivas lógicas

$\mathbf{v}(\mathbf{A})$	$\mathbf{v}(\mathbf{B})$	$\mathbf{v}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$	$\mathbf{v}(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$	$\mathbf{v}(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$	$\mathbf{v}(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B})$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**

$\mathbf{v}(\mathbf{A})$	$\mathbf{v}(\neg\mathbf{A})$
V	**F**
F	**V**

Ejemplo de valoración

- Dado el lenguaje proposicional $\mathbf{L}$ definido por los símbolos de proposición: $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ y $\mathbf{s}$.
- Una posible valoración $\mathbf{v}$ para $\mathbf{L}$ es:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{p}) &= \mathbf{F} \\ \mathbf{v}(\mathbf{q}) &= \mathbf{V} \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}) &= \mathbf{V} \\ \mathbf{v}(\mathbf{s}) &= \mathbf{F} \end{aligned}$$

- Ejercicio: ¿Cuál sería el significado de las fórmulas anteriores bajo la valoración $\mathbf{v}$?

Eliminación de paréntesis: precedencia de conectivas

- Precedencia:
  - nivel 1: $\neg$
  - nivel 2: $\wedge$ $\vee$
  - nivel 3: $\rightarrow$ $\leftrightarrow$
- A igual precedencia “se agrupan” de izquierda a derecha.
- Ejemplos:
  - $\neg \mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ se interpreta como $((\neg \mathbf{p}) \vee \mathbf{q})$ y NO como $(\neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}))$
  - $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \wedge \mathbf{r}$ se interpreta como $(\mathbf{p} \rightarrow (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}))$ y NO como $((\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \wedge \mathbf{r})$
  - $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \vee \mathbf{r}$ se interpreta como $((\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \vee \mathbf{r})$ y NO como $(\mathbf{p} \wedge (\mathbf{q} \vee \mathbf{r}))$

Modelización

- Modelizar: representar formalmente la estructura de frases.
- Algunos “patrones” de modelización de conectivas en castellano:
  - $\neg \mathbf{p}$:
    - no $\mathbf{p}$
    - es falso que $\mathbf{p}$
  - $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$:
    - $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$
    - $\mathbf{p}$ porque $\mathbf{q}$
    - $\mathbf{p}$, pero $\mathbf{q}$
    - $\mathbf{p}$, por otra parte $\mathbf{q}$
    - ambos, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$
    - $\mathbf{p}$, sin embargo $\mathbf{q}$
    - $\mathbf{p}$, además de $\mathbf{q}$
  - $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$:
    - $\mathbf{p}$ o $\mathbf{q}$
    - bien $\mathbf{p}$ o $\mathbf{q}$
    - $\mathbf{p}$ a menos que $\mathbf{q}$
    - $\mathbf{p}$ o $\mathbf{q}$ o ambos
    - al menos $\mathbf{p}$ o $\mathbf{q}$

Modelización (cont.)

- “Patrones” de modelización de conectivas en castellano (cont.):
  - ◇ $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$:
    - si $\mathbf{p}$ entonces $\mathbf{q}$
    - $\mathbf{q}$ si $\mathbf{p}$
    - $\mathbf{q}$ necesario para $\mathbf{p}$
    - no $\mathbf{p}$ a menos que $\mathbf{q}$
    - si $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$
    - $\mathbf{p}$ suficiente para $\mathbf{q}$
    - $\mathbf{p}$ sólo si $\mathbf{q}$
  - ◇ $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$:
    - $\mathbf{p}$ si y sólo si $\mathbf{q}$
    - $\mathbf{p}$ necesario y suficiente para $\mathbf{q}$
    - $\mathbf{p}$ si y sólamente si $\mathbf{q}$

Consecuencia Tautológica

- Una fórmula $\mathbf{B}$ es consecuencia tautológica de las fórmulas $\mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A_n}$ si y sólo si para toda valoración $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{v}(\mathbf{A_1}) = \cdots = \mathbf{v}(\mathbf{A_n}) = \mathbf{V}$ se cumple que $\mathbf{v}(\mathbf{B}) = \mathbf{V}$.
- Una fórmula $\mathbf{B}$ es tautología si y sólo si:
  - ◇ para toda valoración $\mathbf{v}$ se cumple que $\mathbf{v}(\mathbf{B}) = \mathbf{V}$.
  - ◇ Otra definición: es consecuencia tautológica del conjunto vacío de fórmulas.

Consecuencia Tautológica: Ejemplo

- $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$ es consecuencia tautológica de $\{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}, \mathbf{p}\}$
- Demostración con tabla de verdad:

$\mathbf{v(p)}$	$\mathbf{v(q)}$	$\mathbf{v(p \rightarrow q)}$	$\mathbf{v(p \wedge q)}$
V	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**F**

Lema de las Tautologías Elementales

Una fórmula $\mathbf{A_1} \vee \ldots \vee \mathbf{A_n}$, en la que todas las $\mathbf{A_k}$, $\mathbf{k} \in \{\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n}\}$, son fórmulas elementales
afirmadas o negadas, es una tautología si y sólo si existen dos de ellas, $\mathbf{A_i}$ y $\mathbf{A_j}$, tales que $\mathbf{A_i}$ es $\neg\mathbf{A_j}$.
Demostración:

- Si $\mathbf{A_i}$ es $\neg\mathbf{A_j}$ la fórmula es tautología.
    1. La fórmula es $\mathbf{A_1} \vee \ldots \vee \mathbf{A_{i-1}} \vee \neg\mathbf{A_j} \vee \mathbf{A_{i+1}} \vee \ldots \vee \mathbf{A_j} \vee \ldots \vee \mathbf{A_n}$ y $\mathbf{A_j}$ es fórmula elemental.
    2. Para toda valoración $\mathbf{v}$ o bien $\mathbf{v(A_j)} = \mathbf{V}$ o bien $\mathbf{v(A_j)} = \mathbf{F}$.
    3. Si $\mathbf{v(A_j)} = \mathbf{V}$ entonces $\mathbf{v}(\ldots \vee \mathbf{A_j} \vee \ldots) = \mathbf{V}$.
    4. Si $\mathbf{v(A_j)} = \mathbf{F}$ entonces $\mathbf{v(\neg A_j)} = \mathbf{V}$ y por tanto $\mathbf{v}(\ldots \vee \neg\mathbf{A_j} \vee \ldots) = \mathbf{V}$.
    5. La fórmula es verdadera en toda valoración (Casos 2,3,4).

Lema de las Tautologías Elementales (cont. demostración)

- Si la fórmula es tautología entonces alguna $\mathbf{A_i}$ es $\neg\mathbf{A_j}$.
  1. Supongamos que ninguna $\mathbf{A_i}$ es $\neg\mathbf{A_j}$.
  2. La fórmula es $\mathbf{A_1} \vee \ldots \vee \mathbf{A_j} \vee \neg\mathbf{B_1} \vee \ldots \vee \neg\mathbf{B_m}$ (el orden es irrelevante) y todas las $\mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A_j}, \mathbf{B_1}, \ldots, \mathbf{B_m}$ son fórmulas elementales distintas.
  3. Se puede construir una valoración tal que: $\mathbf{v}(\mathbf{A_1}) = \ldots = \mathbf{v}(\mathbf{A_j}) = \mathbf{F}$ y $\mathbf{v}(\mathbf{B_1}) = \ldots = \mathbf{v}(\mathbf{B_m}) = \mathbf{V}$.
  4. En dicha valoración, $\mathbf{v}(\mathbf{A_1}) = \ldots = \mathbf{v}(\mathbf{A_j}) = \mathbf{v}(\neg\mathbf{B_1}) = \ldots = \mathbf{v}(\neg\mathbf{B_m}) = \mathbf{F}$, y por tanto, $\mathbf{v}(\mathbf{A_1} \vee \ldots \vee \mathbf{A_n}) = \mathbf{F}$.
  5. La fórmula no es una tautología.
  6. Existe una $\mathbf{A_i}$ que es $\neg\mathbf{A_j}$ (reducción al absurdo de 1 por contradicción de 5 y la premisa).

Teorema de Efectividad de la Lógica Proposicional

- **Teorema de Efectividad de la Lógica Proposicional**
  Sean $\mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A_n}$ fórmulas (elementales o no).
  Es posible reconocer en un número finito de pasos si la fórmula $\mathbf{A_1} \vee \ldots \vee \mathbf{A_n}$ es o no tautología.