EJERCICIOS DE EXAMEN DE LÓGICA FORMAL
con algunas soluciones

CURSO 2006-2007

Febrero

1. (a) Demuestre utilizando el sistema axiomático de Shoenfield:

$$T[\, p \wedge q,\ t \rightarrow (p \wedge \neg s),\ (p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q \,] \vdash r$$

donde **p, q, r, s, t** son proposiciones o símbolos de predicado ceroario de cierto lenguaje L.

1. $p \wedge q$ Axioma no lógico
2. $(p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q$ Axioma no lógico
3. q Eliminación conjunción o consec. taut. (1) porque para toda **v** tal que $v(p \wedge q) = V$, por definición de **v**, $v(q) = V$
4. p Eliminación conjunción o, análogamente, consec. taut. (1)
5. $\neg (p \wedge \neg r)$ Modus Tollens o, anál., consec. taut. (2,3)
6. $\neg p \vee r$ De Morgan o, anál., c.t. (5)
7. r C.t. (4,6) Análogamente a 3.

(b) Demuestre utilizando el sistema axiomático de Shoenfield:

$$T[\forall x\, P(x),\ \forall x\, (P(x) \wedge \neg Q(x) \rightarrow R(x)),\ \exists x\, (Q(x) \wedge \neg R(x))] \vdash \exists x\, Q(x) \vee \forall y R(y)$$

donde **P, Q** y **R** son símbolos de predicado unoario de cierto lenguaje L.

1. $\exists x\, (Q(x) \wedge \neg R(x))$ Axioma no lógico
2. $\forall x\, (P(x) \wedge \neg Q(x) \rightarrow R(x))$ Axioma no lógico
3. $\forall x\, P(x)$ Axioma no lógico
4. $Q(a) \wedge \neg R(a)$ Axioma no lógico de la teoría ampliada $T_a[1,2,3,4]$
5. $Q(a)$ Eliminación conjunción (4)
6. $Q(a) \rightarrow \exists x Q(x)$ Axioma de sustitución
7. $\exists x Q(x)$ Modus Ponens (5,6)
8. $\exists x Q(x) \vee \forall y R(y)$ Expansión (7)

I. $T_a[1,2,3,4] \vdash \exists x Q(x) \vee \forall y R(y)$

II. $T_a[\forall x\, P(x), \forall x(P(x) \wedge \neg Q(x) \rightarrow R(x)), \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))] \vdash Q(a) \wedge \neg R(a) \rightarrow \exists x Q(x) \vee \forall y R(y)$ (T. deducción)

III. $T[\forall x\, P(x), \forall x(P(x) \wedge \neg Q(x) \rightarrow R(x)), \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))] \vdash Q(x) \wedge \neg R(x) \rightarrow \exists x Q(x) \vee \forall y R(y)$ (T. constantes)

IV. $T[\forall x P(x), \forall x(P(x) \wedge \neg Q(x) \rightarrow R(x)), \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))] \vdash \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x)) \rightarrow \exists x Q(x) \vee \forall y R(y)$ (R. Introd. $\exists$)

V. $T[\forall x\, P(x), \forall x(P(x) \wedge \neg Q(x) \rightarrow R(x)), \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))] \vdash \exists x Q(x) \vee \forall y R(y)$ (Ax. no lógico)

VI. $T[\forall x\, P(x), \forall x(P(x) \wedge \neg Q(x) \rightarrow R(x)), \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))] \vdash \exists x Q(x) \vee \forall y R(y)$ (ModusPonens)

2.
(a) Encuentre un modelo (con dominio o universo {1, 2}, de dos individuos) para la teoría T que tiene como axiomas no lógicos las fórmulas de L:

A_1: $\forall x\ (A(x) \rightarrow B(x))$,
A_2: $\exists y\ \neg B(y)$

y que, simultáneamente, falsifique (o invalide o sea contraejemplo de la fórmula $\neg A(e)$. **A** y **B** son símbolos de predicado unoario y **e** un símbolo de constante de L.

Definición de la estructura M

|M| = {1,2}, a la constante **e** se le hace corresponder el individuo 1, A_M = {1}, B_M = {1} El lenguaje de partida, L, se amplía a L(M) con i, nombre de 1.

Resolución

En M $M(A_1)$ = V porque si i es el nombre de 1 $M(A(i)) = A_M\ (M(i))$ = V, y $M(B(i)) = B_M\ (M(i))$ = V para todo nombre i; y si j es el nombre de 2, $M(A(j))$ = F, es decir $M(A(k) \rightarrow B(k))$ = V para todo nombre k y eso es la definición de A_1 verdadero.

$M(A_2)$ = V porque para un nombre, el de 2, $M(B(j)) = B_M\ (M(j)) = B_M\ (2)$ = F y, por tanto $M(\neg B(j))$ = V y eso es la definición de A_2 verdadero.

$M(\neg A(e))$ = F porque $M(A(e)) = A_M\ (M(e)) = A_M\ (1)$ = V

Como las tres fórmulas son cerradas, resulta que A_i que son V en M, son válidas en M (con lo que M es un modelo de $T[A_1, A_2]$ y $\neg A(e)$, que es F en M, no es válida en M.

(b) Utilizando la respuesta anterior, responda a la siguiente pregunta:
¿ Es $\neg A(e)$ un teorema de la teoría $T[A_1, A_2]$? Justifique la respuesta con el teorema de validez.

No. El teorema de validez dice que los teoremas de una teoría son válidos en dicha teoría. Por tanto, y por la definición de validez en una teoría, $\neg A(e)$ debe ser válida en todos los modelos de la misma. Como esta estructura M es un modelo de $T[A_1, A_2]$ y $\neg A(e)$ no es válida en él, $\neg A(e)$ no es válida en la teoría y, por el contrarrecíproco del teorema de validez, no es teorema de esa teoría.

3. Sean T una teoría de primer orden, L el lenguaje de T y A la fórmula, de L, $\forall x \neg (x + a = b)$, donde "a" y "b" son constantes. Sea M la estructura, para L, formada por los números naturales (enteros positivos y cero) con la suma ordinaria; y **v** una valoración para T.

Dígase si las siguientes afirmaciones son correctas o no. Las respuestas deben escribirse en los espacios colocados entre cada dos afirmaciones consecutivas. Las respuestas no se valorarán si no están justificadas. La justificación consiste en relacionar claramente la respuesta con el concepto o resultado adecuado, que **no** debe ser demostrado a su vez.

(a) A es elemental, pero no atómica

Las fórmulas atómicas son de la forma $P(t_1, t_s,...,t_n)$, donde "P" es un símbolo de predicado n-ario y las "t" son términos.

"=" es un símbolo de predicado, y tanto x+a como b son términos, pero x+a=b viene precedida por una negación y un cuantificador, luego A no es atómica.

Las fórmulas elementales son las atómicas (y A no lo es) o las precedidas por un "$\exists$". Pero A empieza por "$\forall$". Luego no es elemental.

En todo caso, como $\forall x$ equivale a $\neg\exists x\neg$, A se puede escribir $\neg\exists x\neg\neg (x+a=b)$, que es negación de elemental.

(b) A es válida en cualquier estructura

Sea M' una estructura cualquiera. i, j dos de sus individuos (¡no escriban "valores"!). Se asigna a **a** un individuo i y a **b** otro j de M' arbitrariamente, y la pregunta es si SIEMPRE, para cualquier M' y para TODO nombre k, M'(k) + M'(i) = M'(j) es falsa.

Se trata de buscar si hay algún contraejemplo a esto.

Por ejemplo, sea M' formada por el conjunto Z de los números enteros (positivos y negativos) con la suma habitual y la asignación del individuo 1a **a** y del individuo 0 a **b** (no digan los "valores").

NO SE VERIFICA que para TODO i M'(i) + M'(a) = M'(b) es falsa, porque si i es el nombre de -1, -1 + 1 = 0.

Luego A NO es válida en cualquier estructura

(c) Asígnese en M a la constante "b" el número natural "0" (cero) y a la constante "a" el número natural "1" (uno). ¿Es $\forall x \neg (x + a = b)$, válida en M?

Razonando como antes, en el conjunto |M| = N de los números enteros, SÍ se verifica que para todo INDIVIDUO (no digan "valor" de x) i, el resultado de sumarle 1 nunca es cero: $M'(i) + M'(j_1) = M'(j_0)$ es falsa para todo nombre i.

Luego como la única M-estancia de A es ella misma por ser cerrada, y el razonamiento anterior muestra que es verdadera, A es válida en M.

(d) A es V o F en **v**

Como se puede escribir A de la forma $\neg\exists x\neg\neg (x+a=b)$, $\exists x\neg\neg (x+a=b)$ es elemental y una valoración de una fórmula elemental es una asignación arbitraria V o F a esa fórmula, A, por tanto puede ser en unos casos V y en otros F.

(e) Si A es un teorema de cierta teoría, la fórmula $\neg (x + a = b)$ también lo es.

Sí, por el teorema del cierre.

Se puede también probar aplicando el teorema de substitución y Modus Ponens (pero hay que explicitar la prueba)