

LÓGICA FORMAL TEORIAS DE PRIMER ORDEN

Teoremas

Pedro López

*Departamento de Inteligencia Artificial
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid*

Fórmulas elementales

- Teniendo en cuenta las definiciones:

- ◇ $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$

- ◇ $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

- ◇ $A \leftrightarrow B \equiv \neg(\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee A))$

- ◇ $\forall x A \equiv \neg \exists x \neg A$

sólo hacen falta: “ \neg ”, “ \vee ” y “ \exists ”.

- Sea una T una teoría de primer orden.
- Una fórmula A de $L(T)$ es elemental sii:
 - ◇ Es una fórmula atómica, o
 - ◇ es de la forma $\exists x B$, donde B es cualquier fórmula de $L(T)$.
- Nota: en lógica proposicional, los símbolos de proposición son las fórmulas elementales.

Valoraciones

- Una valoración para T es un aplicación, v , tal que a toda fórmula A de $L(T)$ le hace corresponder un valor (V ó F) denotado $v(A)$.
- $v(A)$ se define de la forma siguiente:
 - ◇ Si A es una fórmula elemental, $v(A)$ se fija arbitrariamente.
 - ◇ Si A es una fórmula no elemental (tiene que ser $\neg B$, ó $B \vee C$): tablas de verdad de las conectivas.

$v(B)$	$v(C)$	$v(\neg B)$	$v(B \vee C)$
V	V	F	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

- Una valoración no es una estructura.

Consecuencia tautológica y Teorema de tautología

- Una fórmula B es consecuencia tautológica de las fórmulas A_1, \dots, A_n sii para toda valoración v tal que $v(A_1) = \dots = v(A_n) = V$ se cumple que $v(B) = V$.
- Una fórmula B es tautología sii es consecuencia tautológica del conjunto vacío de fórmulas, es decir, sii para toda valoración v se cumple que $v(B) = V$.
- Teorema de tautología:
 - ◇ (1^a forma, Post) Para toda teoría de primer orden T : Si B es consecuencia tautológica de A_1, \dots, A_n y $T \vdash A_1, \dots, T \vdash A_n$ entonces $T \vdash B$.
(si B es consecuencia tautológica de teoremas, entonces B es teorema).
 - ◇ (2^a forma) Si B es tautología, entonces $T \vdash B$.

Otra definición de teorema

- El teorema de Tautología se puede utilizar para reemplazar aplicaciones de axiomas proposicionales y las reglas de expansión, contracción, asociativa y de corte.
- Dicho de otra forma, podemos dar una definición inductiva de los teoremas de una teoría T , de la forma siguiente:
 - (a) Todo axioma de sustitución, identidad, igualdad o no lógico es un teorema de T .
 - (b) Si A_1, \dots, A_n ($n \geq 0$) son teoremas de T y B es consecuencia tautológica de A_1, \dots, A_n entonces B es teorema de T .
 - (c) Si A es un teorema de T y B se puede inferir de A por la regla de introducción del \exists , entonces B es teorema de T .
 - (d) Sólo son teoremas las fórmulas definidas por (a), (b) o (c).

Reglas de definición de conectivas y cuantificadores

Para toda teoría de primer orden T :

- Definición de \wedge :

Si $T \vdash A \wedge B$ entonces $T \vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$

- Definición de \rightarrow :

Si $T \vdash A \rightarrow B$ entonces $T \vdash \neg A \vee B$

- Definición de \leftrightarrow :

Si $T \vdash A \leftrightarrow B$ entonces $T \vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Si $T \vdash A \leftrightarrow B$ entonces $T \vdash \neg(\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee A))$

- Definición de \forall :

Si $T \vdash \forall x A$ entonces $T \vdash \neg \exists x \neg A$

Reglas de inferencia derivadas

Para toda teoría de primer orden T :

- Regla Conmutativa: Si $T \vdash A \vee B$ entonces $T \vdash B \vee A$
- Regla Modus Ponens: Si $T \vdash A$ y $T \vdash A \rightarrow B$ entonces $T \vdash B$
- Regla del Producto: Si $T \vdash A$ y $T \vdash B$ entonces $T \vdash A \wedge B$
- Regla de Simplificación:
Si $T \vdash A \wedge B$ entonces $T \vdash A$ (y también $T \vdash B$)
- Regla de Doble Negación:
Si $T \vdash \neg\neg A$ entonces $T \vdash A$
Si $T \vdash A$ entonces $T \vdash \neg\neg A$
- Regla Distributiva:
Si $T \vdash A \vee (B \wedge C)$ entonces $T \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Si $T \vdash A \wedge (B \vee C)$ entonces $T \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Otras reglas de inferencia derivadas

Para toda teoría de primer orden T :

- Regla de Contraposición:

Si $T \vdash A \rightarrow B$ entonces $T \vdash \neg B \rightarrow \neg A$

- Regla de Silogismo:

Si $T \vdash A \rightarrow B$ y $T \vdash B \rightarrow C$ entonces $T \vdash A \rightarrow C$

- Regla de Modus Tollens:

Si $T \vdash A \rightarrow B$ y $T \vdash \neg B$ entonces $T \vdash \neg A$

- Regla de Casos:

Si $T \vdash A \vee B$ y $T \vdash A \rightarrow C$ y $T \vdash B \rightarrow C$ entonces $T \vdash C$

- Regla de Reducción al Absurdo:

Si $T \vdash A \rightarrow C$ y $T \vdash A \rightarrow \neg C$ entonces $T \vdash \neg A$

Teorema de Introducción del Cuantificador Universal

- Para toda teoría de primer orden T :
Si $T \vdash A \rightarrow B$ y x no está libre en A entonces $T \vdash A \rightarrow \forall x B$
- Demostración:
 1. $T \vdash A \rightarrow B$ Hipótesis.
 2. $T \vdash \neg B \rightarrow \neg A$ Consecuencia tautológica de 1 (o R. Contraposición en 1).
 3. $T \vdash \exists x \neg B \rightarrow \neg A$ Regla de introducción del \exists en 2.
 4. $T \vdash A \rightarrow \neg \exists x \neg B$ Consecuencia tautológica de 3.
 5. $T \vdash A \rightarrow \forall x B$ Definición de \forall en 4.

Regla de Generalización

- Para toda teoría de primer orden T :
Si $T \vdash A$ entonces $T \vdash \forall x A$

- Demostración:

1. $T \vdash A$	Hipótesis.
2. $T \vdash \neg \neg \forall x A \vee A$	R. de Expansión en 1. (o consecuencia tautológica de 1).
3. $T \vdash \neg \forall x A \rightarrow A$	R. Definición de \rightarrow en 2.
4. $T \vdash \neg \forall x A \rightarrow \forall x A$	Regla de introducción del \forall en 3.
5. $T \vdash \neg \neg \forall x A \vee \forall x A$	R. Definición de \rightarrow en 4.
6. $T \vdash \forall x A \vee \forall x A$	R. Doble negación en 5.
7. $T \vdash \forall x A$	R. de Contracción en 6.

Regla de sustitución

- Para toda teoría de primer orden T :
Si $T \vdash A$ y A' es una instancia de A entonces $T \vdash A'$
- Recordatorio: una instancia de A' se obtiene sustituyendo todas las ocurrencias libres de alguna(s) o todas las variables de A por términos cualesquiera.

Regla de sustitución: demostración

- Demostración:

1^{er} caso: Si A' es $A_x[a]$ (se sustituyen todas las ocurrencias libres de una variable, x , en este caso, por un término cualquiera a).

- | | |
|--|-------------------------------|
| 1. $T \vdash A$ | Hipótesis. |
| 2. $T \vdash \forall x A$ | Regla de generalización 1. |
| 3. $T \vdash \neg \exists x \neg A$ | Definición de \forall en 2. |
| 4. $T \vdash \neg A_x[a] \rightarrow \exists x \neg A$ | Axioma de sustitucion. |
| 5. $T \vdash \neg \neg A_x[a]$ | R. Modus Tollens de 3 y 4. |
| 6. $T \vdash A_x[a]$ | R. Doble negación de 5. |

Regla de sustitución: demostración (cont.)

- 2º caso: Si A' es $A_{x_1, x_2, \dots, x_n}[a_1, a_2, \dots, a_n]$ (sust. simultáneas)
- Sean y_1, y_2, \dots, y_n variables que no aparecen en A ni en A' .
Aplicando la primera parte n veces llegamos a
 $T \vdash A_{x_1, x_2, \dots, x_n}[y_1, y_2, \dots, y_n]$
- Volviéndola a aplicar n veces en la forma:
Si $T \vdash A_{x_1, x_2, \dots, x_n}[y_1, y_2, \dots, y_n]$ entonces
 $T \vdash (A_{x_1, x_2, \dots, x_n}[y_1, y_2, \dots, y_n])_{y_1}[a_1]$,
y escribiendo ésta última fórmula como:
 $T \vdash A_{x_1, x_2, \dots, x_n}[a_1, y_2, \dots, y_n]$,
se llega a:
 $T \vdash A_{x_1, x_2, \dots, x_n}[a_1, a_2, \dots, y_n]$
⋮
 $T \vdash A_{x_1, x_2, \dots, x_n}[a_1, a_2, \dots, a_n]$

Teorema de sustitución

$$(a) T \vdash A_{x_1, x_2, \dots, x_n}[a_1, a_2, \dots, a_n] \rightarrow \exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n A$$

$$(b) T \vdash \forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n A \rightarrow A_{x_1, x_2, \dots, x_n}[a_1, a_2, \dots, a_n]$$

Regla de distribución

- Para toda teoría de primer orden T :
Si $T \vdash A \rightarrow B$ entonces $T \vdash \exists x A \rightarrow \exists x B$ y
 $T \vdash \forall x A \rightarrow \forall x B$

Teorema del Cierre

- Definición: A' es el cierre de A si A' tiene la forma:
 $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n A$ donde $x_1, x_2 \cdots x_n$ son todas las variables libres de A en orden alfabético.
- Teorema del cierre: $T \vdash A$ si y sólo si $T \vdash A'$.
- Demostración:
 - (a) 1. $T \vdash A$ Hipótesis.
 - 2. $T \vdash A'$ Regla de generalización 1 (aplicada n veces).
 - (b) 1. $T \vdash A'$ Hipótesis.
 - 2. $T \vdash A' \rightarrow A$ Teorema de sustitución.
 - 3. $T \vdash A$ R. Modus Ponens de 1 y 2
(o consecuencia tautológica de 1 y 2).
- Corolario del teorema del cierre: A es válida en una estructura M si y sólo si A' es válida en M .

El Teorema de la Deducción

- Teorema de la Deducción

Para toda teoría de primer orden T :

Si A es una fórmula cerrada, y B una fórmula cualquiera entonces:

$$T \vdash A \rightarrow B \text{ si y sólo si } T[A] \vdash B$$

- Corolario del Teorema de la Deducción:

Sean A_1, \dots, A_n fórmulas cerradas de T .

Entonces, para toda fórmula B de T :

$$T \vdash A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B \text{ si y sólo si } T[A_1, \dots, A_n] \vdash B$$

Teorema sobre constantes

- Sea T una teoría de primer orden. Sea T' otra teoría de primer orden obtenida de T por la adición de nuevas constantes, pero no nuevos axiomas. Para toda fórmula A de T y todo conjunto de constantes nuevas distintas e_1, e_2, \dots, e_n se cumple que:

$$T \vdash A \text{ si y sólo si } T' \vdash A_{x_1, x_2, \dots, x_n}[e_1, e_2, \dots, e_n]$$

- Demostración (sólo si):
 1. $T \vdash A$ Hipótesis.
 2. $T' \vdash A$ Monotonía.
 3. $T' \vdash A_{x_1, x_2, \dots, x_n}[e_1, e_2, \dots, e_n]$ Regla de sustitución en 2.

Teorema sobre constantes (cont.): demostración (si)

- Si $T' \vdash A_{x_1, x_2, \dots, x_n}[e_1, e_2, \dots, e_n]$, tomemos una demostración D de $A_{x_1, x_2, \dots, x_n}[e_1, e_2, \dots, e_n]$ en T' .
- Elijamos n variables y_1, y_2, \dots, y_n que no figuren en D , y sustituyamos en D las constantes e_1, e_2, \dots, e_n por las variables y_1, y_2, \dots, y_n .
- Los axiomas no lógicos no son afectados por este cambio, por hipótesis, y los axiomas lógicos, y las aplicaciones de reglas lógicas que aparecen en D , se convierten en axiomas lógicos del mismo tipo, y en aplicaciones de las mismas reglas lógicas.
- Por tanto, la nueva demostración prueba:
$$T \vdash A_{x_1, x_2, \dots, x_n}[y_1, y_2, \dots, y_n]$$
- Aplicando ahora la regla de sustitución obtenemos: $T \vdash A$.

Teorema de equivalencia

- Sea A' la fórmula obtenida de A reemplazando ciertas B_1, B_2, \dots, B_n por, respectivamente, B'_1, B'_2, \dots, B'_n

Si

$$T \vdash B_1 \leftrightarrow B'_1$$

$$T \vdash B_2 \leftrightarrow B'_2$$

⋮

$$T \vdash B_n \leftrightarrow B'_n$$

entonces

$$T \vdash A \leftrightarrow A'$$

Teorema de la variante y Teorema de simetría

- Teorema de la variante:

Si A' es una variante de A entonces $T \vdash A \leftrightarrow A'$

- Teorema de simetría:

$$T \vdash a = b \leftrightarrow b = a$$

Teorema de la Reducción

- Teorema de la reducción:
 - ◇ Sea Γ un conjunto de n fórmulas de la teoría de primer orden T ,
y
 - ◇ sea A una fórmula de $L(T)$.

Entonces:

A es un teorema de $T[\Gamma]$ si y sólo si en T hay un teorema de la forma

$$B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_n \rightarrow A$$

donde cada B_i es el cierre una fórmula de Γ

Teoría Inconsistente: Definición

- Una teoría T es inconsistente si y sólo para toda fórmula A de T se cumple que $T \vdash A$.
- Otras condiciones equivalentes:
 - ◇ Una teoría T es inconsistente si y sólo si existe una fórmula B tal que simultáneamente $T \vdash B$ y $T \vdash \neg B$
 - ◇ Una teoría T es inconsistente si y sólo si no tiene ningún modelo.

Teorema de Reducción para Consistencia

- Sea Γ un conjunto no vacío de fórmulas de la teoría de primer orden T .
- $T[\Gamma]$ es inconsistente si y sólo si en T hay un teorema de la forma:

$$\neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \dots \vee \neg B_n$$
donde cada B_i es el cierre de una fórmula B_i^o de Γ , y todas las fórmulas B_i^o son distintas entre sí.
- Corolario del Teorema de Reducción para Consistencia
Sea A el cierre de A^o . Entonces:

$$T \vdash A^o \text{ si y sólo si } T[\neg A] \text{ es inconsistente.}$$