LÓGICA FORMAL
TEORIAS DE PRIMER ORDEN

Sintaxis y semántica

Pedro López

Departamento de Inteligencia Artificial
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid

Lenguajes de primer orden

- La lógica (de primer orden) es un lenguaje para representar afirmaciones (o enunciados).
- Un lenguaje se define a partir de un conjunto de símbolos y unas reglas de combinación de símbolos.
- El conjunto de estos símbolos recibe el nombre de alfabeto.

Alfabeto de un lenguaje de primer orden

- Símbolos NO lógicos
  - Símbolos de constante: $a, b, c, \ldots$
  - Símbolos de función: $f, g, h, \ldots$
  - Símbolos de predicado: $p, q, r, \ldots$
- Símbolos lógicos
  - Predicado binario de igualdad: $=$
  - Símbolos de variable: $x, y, z, \ldots$
  - Conectivas lógicas
    - Negación: $\neg$
    - Disyunción: $\bigvee$
    - Conjunción: $\bigwedge$
    - Implicación: $\longrightarrow$
    - Equivalencia: $\leftrightarrow$
  - Cuantificadores
    - Existencial: $\exists$
    - Universal: $\forall$

Términos

- Los términos son (todas las) expresiones del lenguaje con las que se pueden designar individuos.
- Un término se define inductivamente de la forma siguiente:
  - ◇ Todo símbolo de constante es un término.
  - ◇ Todo símbolo de variable es un término.
  - ◇ Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos y f un símbolo de función (cualquiera) n–ario, entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un término.
  - ◇ No hay más términos que los definidos por los puntos anteriores.

Fórmula atómica

- Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos y p un símbolo de predicado n–ario, entonces $p(t_1, \ldots, t_n)$ es una fórmula atómica.
- Es decir, un símbolo de predicado aplicado a términos.
- Representa una afirmación sobre los individuos representados por $t_1, \ldots, t_n$

Fórmulas

- Se pueden definir inductivamente de la forma siguiente:
  - ◇ Toda fórmula atómica es una fórmula.
  - ◇ Si A es una fórmula y x una variable (cualquiera) entonces $(\forall x\ A)$ y $(\exists x\ A)$ son fórmulas.
  - ◇ Si A es una fórmula entonces $(\neg A)$ es una fórmula.
  - ◇ Si A y B son fórmulas entonces $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \longrightarrow B)$ y $(A \leftrightarrow B)$ son fórmulas.
  - ◇ No hay más fórmulas que las definidas por los puntos anteriores.
- Denotaremos fórmulas genéricas con: A, B, C, ...
- Precedencia (a igual precedencia “se agrupan” de izquierda a derecha):
  - ◇ nivel 1: $\neg\ \ \forall\ \ \exists$
  - ◇ nivel 2: $\wedge\ \ \vee$
  - ◇ nivel 3: $\longrightarrow\ \ \leftrightarrow$

Ámbito de un cuantificador

- El ámbito de un cuantificador es la parte de una fórmula a la que afecta el cuantificador.
- El ámbito de un cuantificador $\forall x$ (resp. $\exists x$) en una fórmula $\forall x\ F$ (resp. $\exists x\ F$) es F. Es decir, la (sub)fórmula a la que afecta.
- El ámbito de un cuantificador es la fórmula más pequeña que viene a continuación del cuantificador.
- El ámbito de un cuantificador es la fórmula que hay justo debajo de la ocurrencia más baja de dicho cuantificador en el árbol sintáctico de la fórmula.
- Ejemplos:
  - En $\exists x\ p(x)$, el ámbito de $\exists x$ es $p(x)$.
  - En $\forall x\ p(x,y) \wedge q(x)$, el ámbito de $\forall x$ es $p(x,y)$.
  - En $\forall x\ (p(x,y) \wedge q(x))$, el ámbito de $\forall x$ es $p(x,y) \wedge q(x)$.

Ámbito de un cuantificador: Ejemplos (cont.)

- En $\exists x\ \exists y\ p(x,y)$
  - el ámbito de $\exists x$ es $\exists y\ p(x,y)$.
  - El ámbito de $\exists y$ es $p(x,y)$.
- En $\exists x\ q(x) \vee \forall y\ p(x,y) \wedge r(y)$
  - el ámbito de $\exists x$ es $q(x)$.
  - El ámbito de $\forall y$ es $p(x,y)$.

Variables libres y ligadas

- Una ocurrencia de una variable x en una fórmula está ligada si está en el ámbito de un cuantificador de la forma $\forall x$ o $\exists x$.
- Cualquier otra ocurrencia de la variable está libre.
- Una fórmula que no tiene ocurrencias de variables libres es una fórmula <u>cerrada</u>.
- Una fórmula que tiene alguna ocurrencia de variable libre es una fórmula <u>abierta</u>.
- Ejemplos:
  - En $\exists x\ p(x)$ la ocurrencia de la variable x está ligada.
  - En $\exists x\ p(x, y)$ la ocurrencia de la variable x está ligada mientras que la ocurrencia de la variable y está libre.
  - En $p(x, y)$ la ocurrencia de la variable x está libre y la ocurrencia de la variable y está libre.
  - En $\forall x\ p(x, y) \wedge q(x)$ la primera ocurrencia de la variable x está ligada mientras que la segunda ocurrencia de la variable x está libre. La (única) ocurrencia de la variable y está libre.

Variables libres y ligadas: Ejemplos (cont.)

- En $\forall x\ (p(x, y) \wedge q(x))$ las dos ocurrencias de la variable x están ligadas mientras que la ocurrencia de la variable y está libre.
- En $\exists x\ \exists y\ p(x, y)$ la ocurrencia de la variable x está ligada y la ocurrencia de la variable y está también ligada.
- En $\exists x\ q(x) \vee \forall y\ p(x, y) \wedge r(y)$, la primera ocurrencia de x está ligada. La segunda ocurrencia está libre. La primera ocurrencia de y está ligada. La segunda ocurrencia está libre.

Sustitución de variables

- Dada una fórmula denotata por A, la expresión $A_x[t]$ denota la fórmula obtenida al sustituir todas las ocurrencias libres de la variable x en A por el término t (por el que es sustituible).
- EJEMPLO:
  Si A denota a la fórmula $p(x)$, entonces
  $A_x[b]$ denota a la fórmula $p(b)$.
- En general, $A_{x_1,\ldots,x_n}[t_1,\ldots,t_n]$, donde las sustituciones son simultáneas.
- EJEMPLO: Si A denota a $p(x,y)$, entonces
  $A_{x,y}[f(y),a]$ denota $p(f(y),a)$ y no $p(f(a),a)$.

Sustitución de variables: Ejemplo

A	*Sustitución*	*Resultado*
$\exists x\ p(x,y)$	$A_y[f(z)]$	$\exists x\ p(x,f(z))$
$\forall x\ p(x,y) \wedge q(x)$	$A_x[a]$	$\forall x\ p(x,y) \wedge q(a)$
$\forall x\ (p(x,y) \wedge q(x))$	$A_x[f(b)]$	$\forall x\ (p(x,y) \wedge q(x))$
$p(x,y) \vee q(x,z)$	$A_{x,y}[a,b]$	$p(a,b) \vee q(a,z)$

Variables sustituibles

- En general, si sustituyo una variable x por un término t en una fórmula, la afirmación que hacía la fórmula sobre x, ahora la hace sobre t, pero no siempre ocurre esto.
- EJEMPLO: $\exists y\ x = 2 * y$ dice "x es par"
  Sustituyendo x por y se cambia el significado:
  $\exists y\ y = 2 * y$ dice "existe un número que es el doble de sí mismo"
- sustituyendo x por $z + 1$, se dice de $z + 1$ lo mismo que se decía de x:
  $\exists y\ z + 1 = 2 * y$ dice "$z + 1$ es par" (o sea, "z es impar")
- sustituyendo x por $x + 1$, se dice de $x + 1$ lo mismo que se decía de x:
  $\exists y\ x + 1 = 2 * y$ dice "$x + 1$ es par" (o sea, "x es impar")
  (¡no hay ninguna relación con la x de antes!)

Variable sustituible: Definición

- Una variable x es sustituible por un término t en una fórmula A si ninguna ocurrencia de alguna variable z que aparece libre en el término t queda ligada al hacer la sustitución.
- Ejemplos:
  $A \equiv (\exists z\ p(x, z) \wedge q(y))$
  - Si $t \equiv f(z)$, entonces x NO es sustituible por t en A.
  - Si $t \equiv f(y)$, entonces x ES sustituible por t en A.
  - Si $t \equiv f(x)$, entonces x ES sustituible por t en A.

Variable sustituible: (otra) definición

- Una variable x es sustituible por un término t en una fórmula A si para toda ocurrencia de variable z que aparece libre en el término t no hay ninguna subfórmula de A de la forma $\forall z\ B$ o $\exists z\ B$ tal que B contenga una ocurrencia libre de la variable x.
- Razón: si B contiene una ocurrencia libre de la variable x, entonces x se sustituirá por t y la ocurrencia libre de z dejará de ser libre (e.d. quedará ligada).
- Ejemplos:

  $A \equiv (\exists z\ p(x, z) \wedge q(y))$

  $B \equiv p(x, z)$

  ◇ Si $t \equiv f(z)$, entonces x NO es sustituible por t en A.

  ◇ Si $t \equiv f(y)$, entonces x ES sustituible por t en A.

  ◇ Si $t \equiv f(x)$, entonces x ES sustituible por t en A.

Significado de las fórmulas

- Las fórmulas de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ representan afirmaciones o enunciados,
- los cuales podrán ser verdaderos o falsos.
- Para determinar si una fórmula de $\mathcal{L}$ es verdadera o falsa, hay que asignarle un significado:

  ◇ Asignar significado a los símbolos no lógicos del lenguaje: símbolos de constante, símbolos de función y símbolos de predicado (excepto $=$).

  ◇ Fijar un dominio o universo de discurso.

Definición de estructura

- Dado un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$, una estructura M para $\mathcal{L}$ consta de:
  - Un dominio (o universo) $|M|$.
    Conjunto no vacío de individuos.
  - Significado de los símbolos de constante:
    a cada símbolo de constante, $a \in L$ se le asigna un individuo $m \in |M|$.
    Notación: $M(a) = m$.
  - Significado de los símbolos de función:
    A cada símbolo de función n–ario f de $\mathcal{L}$ se le asigna una función concreta f_M (de la misma aridad).
  - Significado de los símbolos de predicado:
    a cada predicado n-ario p de $\mathcal{L}$ se le asigna un predicado concreto p_M (de la misma aridad).

Significado de los términos (sin variables)

- El significado de un término es un individuo concreto del dominio $|M|$:
  - El significado de un símbolo de constante $a \in L$ es el individuo $m \in |M|$ que le asigna la estructura M.
    $M(a) = m$.
  - $M(f(t_1, \ldots, t_n)) = f_M(M(t_1), \ldots, M(t_n))$

Significado de las formulas atómicas (sin variables libres)

- Es un valor de verdad $\{V, F\}$ que le corresponde según la estructura M.
  - $M(t_1 = t_2) = V$ si y solo si $M(t_1) = M(t_2)$.
  - Para los símbolos de predicado p n–arios distintos de la igualdad: $M(p(t_1, \ldots, t_n)) = p_M(M(t_1), \ldots, M(t_n))$

Significado de las fórmulas (cerradas) cuantificadas

- Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y M una estructura para $\mathcal{L}$.
- Sean $c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots$ símbolos de constante distintos (que no aparecen en $\mathcal{L}$): son los nombres de todos los individuos del dominio $|M|$.
- Hay sólo un símbolo de constante c_i para cada individuo del dominio $|M|$.
- Sea $\mathcal{L}(M)$ el lenguaje obtenido al añadir a $\mathcal{L}$ los símbolos de constante $c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots$.
- La estructura M se amplía a $\mathcal{L}(M)$ asignando a cada nombre de individuo, el individuo al que nombra. Es decir, $M(c_i)$ es el individuo al que nombra c_i.

Significado de las fórmulas (cerradas) cuantificadas

- $M(\forall x\ A) = V$ si $M(A_x[c_i]) = V$ para todo nombre de indivíduo $c_i \in \mathcal{L}(M)$

  $M(\forall x\ A) = F$ en otro caso.
- $M(\exists x\ A) = V$ si $M(A_x[c_i]) = V$ para algún nombre de indivíduo $c_i \in \mathcal{L}(M)$

  $M(\exists x\ A) = F$ en otro caso.

Significado de fórmulas (cerradas) con conectivas

$M(A)$	$M(B)$	$M(A \wedge B)$	$M(A \vee B)$	$M(A \rightarrow B)$	$M(A \leftrightarrow B)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

$M(A)$	$M(\neg A)$
V	F
F	V

Funciones de Verdad

Una función de verdad es una función que va del conjunto de los valores de verdad $\{V, F\}$ al mismo conjunto, y que determina el significado de una conectiva.

- $Sig_\wedge(V, V) = V$
  $Sig_\wedge(V, F) = Sig_\wedge(F, V) = Sig_\wedge(F, F) = F$
- $Sig_\vee(F, F) = F$
  $Sig_\vee(V, F) = Sig_\vee(F, V) = Sig_\vee(V, V) = V$
- $Sig_\neg(V) = F$
  $Sig_\neg(F) = V$
- $Sig_\rightarrow(V, F) = F$
  $Sig_\rightarrow(F, V) = Sig_\rightarrow(F, F) = Sig_\rightarrow(V, V) = V$
- $Sig_\leftrightarrow(V, F) = Sig_\leftrightarrow(F, V) = F$
  $Sig_\leftrightarrow(V, V) = Sig_\leftrightarrow(F, F) = V$

Significado de fórmulas cerradas (sin variables libres)

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y M una estructura para $\mathcal{L}$.

- $M(\neg A) = Sig_\neg(M(A))$
- $M(A \wedge B) = Sig_\wedge(M(A), M(B))$
- $M(A \vee B) = Sig_\vee(M(A), M(B))$
- $M(A \rightarrow B) = Sig_\rightarrow(M(A), M(B))$
- $M(A \leftrightarrow B) = Sig_\leftrightarrow(M(A), M(B))$

Definición: M-Instancia

- Dada una fórmula A de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ y una estructura M para $\mathcal{L}$, una M-instancia de A es toda fórmula (cerrada) obtenida sustituyendo todas las ocurrencias libres de variables de A por **nombres** de individuos de $\mathcal{L}(M)$.
- Es decir, toda fórmula cerrada de la forma $A_{x_1,\ldots,x_n}[c_1,\ldots,c_n]$, siendo $x_1,\ldots,x_n$ todas las variables libres de A, y $c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots$ nombres de individuos (los individuos son elementos de $|M|$).
- Ejemplo:
  Fórmula: $\forall x\ p(x,y,z)$
  M-instancias: $\forall x\ p(x,c_1,c_1), \forall x\ p(x,c_1,c_2)$, ...

Definición: validez de una fórmula en una estructura

- Dada una fórmula A de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ y una estructura M para $\mathcal{L}$, se dice que A es válida en M si para toda M-instancia de A, A' se tiene que $M(A') = V$.
- Se denota:

$$M \models A$$

- En particular si la fórmula A es cerrada (no tiene variables libres), A es **válida** en M si $M(A) = V$, puesto que la única M-instancia de A es ella misma.

Modelo - Fórmula satisfacible

Sea A una fórmula de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ y M una estructura para $\mathcal{L}$.

- Si A es **válida** en M, se dice que M es un **modelo** de A:

$$M \models A$$

- A es satisfacible si tiene algún modelo.
- A es insatisfacible si no tiene ningún modelo.

Nomenclatura

- Sea A una fórmula de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ y M una estructura para $\mathcal{L}$.
- Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  - A es **válida** en M.
  - M **valida** a la fórmula A.
  - M es un **modelo** de la fórmula A.
  - M **satisface** a la fórmula A.
- Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  - A no es **válida** en M.
  - Para alguna M-instancia de A, A', se tiene que $M(A') = F$.
  - M es un **contramodelo** de la fórmula A.
  - M es un **contraejemplo** de la fórmula A.
  - M no **valida** a la fórmula A.
  - M no **satisface** a la fórmula A.

Modelos de conjuntos de fórmulas

Ampliamos la definición de modelo a conjuntos de fórmulas:

- Sea Γ un conjunto de fórmulas de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ y M una estructura para $\mathcal{L}$,
- se dice que M es un modelo de Γ, si M es un modelo de toda fórmula $A \in \Gamma$.
- Se denota: $M \models \Gamma$
- Otras definiciones (equivalentes):
  - ◇ M valida a Γ si y sólo si M valida a toda fórmula A de Γ.
  - ◇ Es decir, $M \models \Gamma$ si y sólo si para toda $A \in \Gamma$, $M \models A$.
  - ◇ Asumiendo $\Gamma = \{F_1, \dots, F_n\}$:
    $M \models \Gamma$ si y sólo si $M \models F_1$ y $\dots$ y $M \models F_n$.

Consecuencia lógica

- Una fórmula A es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas Γ si y sólo si todo modelo de Γ es también un modelo de A.
- Otras definiciones (equivalentes):
  - ◇ Si toda estructura que valida a todas las fórmulas de Γ también valida a la fórmula A.
  - ◇ Si para toda estructura M tal que $M \models \Gamma$ entonces $M \models A$.
  - ◇ Suponiendo que $\Gamma = \{F_1, \dots, F_n\}$: si para toda estructura M tal que $M \models F_1$ y $\dots$ y $M \models F_n$, entonces $M \models A$.

Fórmula (lógicamente) válida

- Sea A una fórmula de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$,
- A es (lógicamente) válida si es válida en toda estructura M para $\mathcal{L}$.
- Se denota: $\models A$.
- Otras definiciones (equivalentes):
  - ◇ A es (lógicamente) válida si no tiene contramodelos.
  - ◇ A es (lógicamente) válida si es consecuencia lógica del conjunto vacío de fórmulas.

Teoría de Primer Orden

Formalmente, una TEORÍA DE PRIMER ORDEN T consta de:

- Un LENGUAJE DE PRIMER ORDEN, que representaremos como $L(T)$.
- AXIOMAS LÓGICOS: son un conjunto de fórmulas lógicamente válidas (es decir, válidas en toda estructura para $L(T)$).
  - ◇ EJEMPLO: $\neg A \vee A$
- AXIOMAS NO LÓGICOS: son fórmulas, como por ejemplo, las premisas de un razonamiento (que no es necesario que sean válidas), pero que nosotros tomamos como base para obtener otras fórmulas que sean consecuencia lógica de ellas (y de los axiomas lógicos).
- REGLAS DE INFERENCIA: son reglas que permiten obtener unas fórmulas a partir de otras que ya tenemos (la idea es que estas nuevas fórmulas obtenidas sean consecuencia lógica de las que ya tenemos).
  NOTACIÓN: Una teoría de primer orden con axiomas no lógicos $A_1, \ldots, A_n$ se denota $T[A_1, \ldots, A_n]$.

Teoría de Primer Orden Básica T (Shoenfield)

- AXIOMAS LÓGICOS:
  - AXIOMAS PROPOSICIONALES: $\neg A \vee A$
  - AXIOMAS DE SUSTITUCIÓN: $A_x[t] \rightarrow \exists x\ A(x)$
  - AXIOMAS DE IDENTIDAD: $x = x$
  - AXIOMAS DE IGUALDAD:

$$x_1 = y_1 \rightarrow (x_2 = y_2 \rightarrow (\ldots \rightarrow (x_n = y_n \rightarrow (f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n))) \cdots))$$

$$x_1 = y_1 \rightarrow (x_2 = y_2 \rightarrow (\ldots \rightarrow (x_n = y_n \rightarrow (p(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow p(y_1, \ldots, y_n))) \cdots))$$

Teoría de Primer Orden Básica T (Shoenfield)

REGLAS DE INFERENCIA:

Regla de expansión:

$$\frac{A}{B \vee A}$$

Regla de contracción (idempotencia):

$$\frac{A \vee A}{A}$$

Regla de asociación (asociativa):

$$\frac{A \vee (B \vee C)}{(A \vee B) \vee C}$$

Regla de corte:

$$\frac{A \vee B, \neg A \vee C}{B \vee C}$$

Regla de introducción del cuantificador existencial:

$$\frac{A \rightarrow B, \ \text{y } x \text{ no libre en } B}{\exists x\ (A \rightarrow B)}$$

Ejemplo de Inferencia

- Podemos inferir la fórmula $A \longrightarrow (B \longrightarrow A)$ de la forma siguiente:

1. $\neg A \vee A$	Axioma Proposicional
2. $\neg\neg A \vee \neg A$	Axioma Proposicional
3. $A \vee \neg A$	Corte 1, 2
4. $\neg B \vee (A \vee \neg A)$	Expansión 3
5. $(\neg B \vee A) \vee \neg A$	Asociación 4
6. $\neg(\neg B \vee A) \vee (\neg B \vee A)$	Axioma Proposicional
7. $\neg A \vee (\neg B \vee A)$	Corte 5, 6
8. $A \longrightarrow (B \longrightarrow A)$	Definición $\longrightarrow$ 7

- Observación: Los pasos 1-3 y 5-7 están basados en la conmutatividad de $\vee$.
- Sería más cómodo demostrar dicha conmutatividad de una vez por todas y utilizarla luego como una regla más.

Reglas de Inferencia Derivadas

- A partir de las reglas de inferencia "básicas" anteriores, podemos definir reglas de inferencia "derivadas", cuya aplicación puede verse como la agrupación en un solo paso de una secuencia de pasos de una demostración.
- Ejemplo: Regla conmutativa:

$$\frac{A \vee B}{B \vee A}$$

- Una aplicación de la regla conmutativa agrupa los pasos 2 y 3 de:

1. $A \vee B$	
2. $\neg A \vee A$	Axioma Proposicional
3. $B \vee A$	Corte 1, 2

Reglas de Inferencia Derivadas: Modus Ponens

- Ejemplo: regla de inferencia Modus Ponens:

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

- Una aplicación de la regla de inferencia Modus Ponens agrupa los pasos 3 y 7 de:

$1.\ A \rightarrow B$	
$2.\ A$	
$3.\ \neg A \vee B$	Definición $\longrightarrow$ 1
$4.\ B \vee A$	Expansión 2
$5.\ A \vee B$	Conmutativa 4
$6.\ B \vee B$	Corte 5, 3
$7.\ B$	Contracción 6

Demostración (o Prueba) de una Fórmula:

- Una demostración (o prueba) de una fórmula A en una teoría de primer orden es una secuencia de fórmulas del lenguaje de la teoría tal que la última fórmula de la secuencia es A, y cada fórmula de la secuencia es:
  - ◇ un axioma lógico, o bien
  - ◇ un axioma no lógico, o bien
  - ◇ el consecuente de una regla de inferencia cuyos antecedentes son fórmulas anteriores en la secuencia.
- Ejemplo: demostración en $T[p, p \rightarrow q]$:

$1.\ p$	Axioma no lógico.
$2.\ p \rightarrow q$	Axioma no lógico.
$3.\ q$	Modus ponens con 1 y 2.

- Notación:
  $T[A_1, \ldots, A_n] \vdash B$ representa que B tiene una demostración en la teoría con axiomas no lógicos $A_1, \ldots, A_n$. Ejemplo: $T[p, p \rightarrow q] \vdash q$.

Teorema

- Una fórmula B es un teorema de la teoría T cuyos axiomas no lógicos son $A_1, \ldots, A_n$, si y sólo si B tiene una demostración en dicha teoría.
- Se representa: $T[A_1, \ldots, A_n] \vdash B$.
- Si la fórmula B es un teorema de la teoría T, se representa $\vdash B$.
- Observación:
  - Si A es un teorema entonces $\vdash A$.
  - Si A es un axioma entonces (por definición) $\vdash A$.

Modelo de una Teoría de Primer Orden

- Sea T una teoría de primer orden cuyos axiomas no lógicos son $A_1, \ldots, A_n$.
- Sea M una estructura para el lenguaje $L(T)$, entonces:
  - M es un MODELO de dicha teoría si y sólo si M es un modelo de $\{A_1, \ldots, A_n\}$ (de sus axiomas no lógicos).
  - Una FÓRMULA B es VÁLIDA en dicha TEORÍA si y sólo si la fórmula es válida en todo modelo de la teoría.
    - Observación: Es equivalente a decir que B es consecuencia lógica de los axiomas no lógicos de la teoria, es decir, de $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

Teorema de la Validez

- Teorema de la Validez:
  Si A es teorema de una teoría de primer orden entonces es consecuencia lógica de sus axiomas no lógicos:
  - Cada teorema de la teoría es válido en la teoría.
  - Si $T \vdash A$ entonces $T \models A$
- ¡Si se puede demostrar una fórmula en una teoría, entonces la fórmula es válida en la teoría!.
- Por contraposición: si una fórmula no es válida en una teoría, entonces no es teorema de dicha teoría.

Teorema de Completud: Enunciado

- Teorema de Completud:
  - Si una fórmula es válida en una teoría, entonces es un teorema de dicha teoría.
  - Si $T \models A$ entonces $T \vdash A$.
  - Si la fórmula A es consecuencia lógica de los axiomas no lógicos de una teoría, entonces A es teorema de dicha teoría.

Demostración del Teorema de la Validez (Esquema)

- Demostración por inducción, con el siguiente esquema:
  1. Demostrar que los axiomas lógicos son fórmulas lógicamente válidas.
  2. Demostrar que para cada una de las reglas de inferencia se cumple que la fórmula consecuente de la regla de inferencia es consecuencia lógica de las fórmulas antecedentes de la regla.

Lema: Validez de los Axiomas

- Los axiomas lógicos son fórmulas lógicamente válidas.
  - Si A es axioma lógico entonces $\models A$.
- Demostración por partes (para cada axioma).

Validez de los Axiomas de Sustitución: Demostración

- Queremos demostrar:
  $\models A_x[t] \rightarrow \exists x\ A(x)$
- Lo escribimos como:
  $\models \neg A_x[t] \vee \exists x A$

Para toda estructura M,

1 Toda M-instancia de $\neg A_x[t] \vee \exists x A$ es de la forma $\neg A_x^*[t^*] \vee \exists x A_x^*$, siendo A_x^* quasi-M-instancia de A (cerrada en todas las variables excepto x).

2 O bien $M(\neg A_x^*[t^*]) = V$ o bien $M(\neg A_x^*[t^*]) = F$.

3 Si $M(\neg A_x^*[t^*]) = V$ entonces $M(\neg A_x^*[t^*] \vee \exists x A_x^*) = V$.

4 Si $M(\neg A_x^*[t^*]) = F$ entonces $M(A_x^*[t^*]) = V$.

5 Sea $M(t^*) = d \in |M|$ y n el nombre de d. Entonces $M(A_x^*[n]) = M(A_x^*[t^*]) = V$.

Validez de los Axiomas de Sustitución: Demostración (Cont.)

6 Si (hay un n para el que) $M(A_x^*[n]) = V$ entonces $M(\exists x A_x^*) = V$.

7 Si $M(\neg A_x^*[t^*]) = F \Rightarrow M(\exists x A_x^*) = V \Rightarrow$ $M(\neg A_x^*[t^*] \vee \exists x A_x^*) = V$ (Silogismo 4, 5, 6).

8 Para toda M-instancia de $\neg A_x[t] \vee \exists x A$, $M(\neg A_x^*[t^*] \vee \exists x A_x^*) = V$ (Casos 1, 2, 3, 7).

9 $M \models \neg A_x[t] \vee \exists x A$.

Lema: Validez de las Reglas

- La fórmula consecuente de una regla de inferencia es consecuencia lógica de las fórmulas antecedentes de la regla:
  Si
  $$\frac{P_1, \ldots, P_n}{C}$$
  es una regla de inferencia entonces C es consecuencia lógica de $P_1, \ldots, P_n$.
- Ejemplo:
  - En la Regla de Corte:
    $$\frac{A \vee B, \neg A \vee C}{B \vee C}$$
    $B \vee C$ es consecuencia lógica de $A \vee B$ y $\neg A \vee C$
- Demostración por partes (para cada regla).

Validez de la Regla de Corte: Demostración

Para toda estructura M tal que $M \models A \vee B$ y $M \models \neg A \vee C$,
Para toda M-instancia $B^* \vee C^*$:

1 Existen M-instancias de $A \vee B$ y $\neg A \vee C$, $A^* \vee B^*$ y $\neg A^* \vee C^*$ (con la misma A^*).

2 $M(A^* \vee B^*) = V$ (ya que $M \models A \vee B$).

3 $M(\neg A^* \vee C^*) = V$ (ya que $M \models \neg A \vee C$).

4 O bien $M(A^*) = V$ o bien $M(A^*) = F$.

5 Si $M(A^*) = V \Rightarrow M(\neg A^*) = F \Rightarrow$ (por 3) $M(C^*) = V \Rightarrow M(B^* \vee C^*) = V$.

6 Si $M(A^*) = F \Rightarrow$ (por 2) $M(B^*) = V \Rightarrow M(B^* \vee C^*) = V$.

7 $M(B^* \vee C^*) = V$ (Casos 4, 5, 6).

por tanto, $M \models B \vee C$.

Lema: Transitividad de las Consecuencias Lógicas

- En la demostración del Teorema de Validez se utiliza también la siguiente propiedad (trivial):
  - Transitividad de las Consecuencias Lógicas:
    Si $B_1, \ldots, B_m$ son consecuencias lógicas de una serie de fórmulas $A_1, \ldots, A_n$ y B es consecuencia lógica de $B_1, \ldots, B_m$ entonces B es consecuencia lógica de $A_1, \ldots, A_n$.
- Demostración:
  Para toda estructura M tal que $M \models A_1, \ldots, M \models A_n$,
  1. $M \models B_1, \ldots, M \models B_m$.
  2. Si $M \models B_1, \ldots, M \models B_m$ entonces $M \models B$.
  3. $M \models B$ (Modus Ponens 1,2).

Teorema de la Validez: Enunciado

- Teorema de la Validez:
  Si A es teorema de una teoría de primer orden entonces es consecuencia lógica de sus axiomas no lógicos:
  - Cada teorema de la teoría es válido en la teoría.
  - Si $T \vdash A$ entonces $T \models A$

Teorema de la Validez: Demostración por Inducción

Por inducción sobre la demostración de $T[A_1, \ldots, A_m] \vdash A$.
Sea $B_1, \ldots, B_n$ dicha demostración.

- Base:
  Si B_1 es la primera fórmula de la demostración entonces es consecuencia lógica de $A_1, \ldots, A_m$.
  1. B_1 sólo puede ser un axioma lógico o no lógico.
  2. Si B_1 es axioma lógico, $\models B_1$ (Validez de los Axiomas).
  3. Si $\models B_1$ entonces B_1 es consecuencia lógica de $A_1, \ldots, A_m$ (Aumento de Premisas).
  4. Si B_1 es axioma lógico entonces es consecuencia lógica de $A_1, \ldots, A_m$ (Silogismo 2, 3).
  5. Si B_1 es axioma no lógico (es una de las A_i) entonces es consecuencia lógica de $A_1, \ldots, A_m$.
  6. B_1 es consecuencia lógica de $A_1, \ldots, A_m$ (Casos 1, 4, 5).

Teorema de la Validez: Demostración por Inducción

- Hipótesis:
  $B_1, \ldots, B_{n-1}$, fórmulas anteriores a B_n en la demostración, son consecuencias lógicas de $A_1, \ldots, A_m$.
- Paso:
  La fórmula B_n, n-ésima en la demostración, es consecuencia lógica de $A_1, \ldots, A_m$.

  1 B_n sólo puede ser un axioma lógico o no lógico o el consecuente de una regla de inferencia con antecedentes anteriores en la demostración.

  2 Si B_n es axioma (lógico o no lógico) entonces es consecuencia lógica de $A_1, \ldots, A_m$ (igual que el caso base).

Teorema de la Validez: Demostración por Inducción (Cont.)

- Paso (Cont.):

  3 Si B_n es consecuente de una regla con antecedentes Γ entonces es consecuencia lógica de Γ (Validez de las Reglas).

  4 $\Gamma \subseteq \{B_1, \ldots, B_{n-1}\}$ (son anteriores a B_n) y por tanto: para cada $B_l \in \Gamma$ se cumple que B_l es consecuencia lógica de $A_1, \ldots, A_m$ (por la hipótesis).

  5 Si cada $B_l \in \Gamma$ es consecuencia lógica de $A_1, \ldots, A_m$ y B_n es consecuencia lógica de Γ entonces B_n también es consecuencia lógica de $A_1, \ldots, A_m$
  (Transitividad de las Consecuencias Lógicas).

  6 Si B_n es consecuente de una regla entonces es consecuencia lógica de $A_1, \ldots, A_m$

  7 B_n es consecuencia lógica de $A_1, \ldots, A_m$ (Casos 1, 2, 6).